Die

Plötzlichen Fixierungen eines starren Körpers.

Ein Beitrag zur vektoranalytischen Behandlung der Dynamik der Momentankräfte.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Victor Lewe
aus Löningen i. O.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1906.

Von der Fakultät angenommen am 31. Mai 1906.

Einleitung.

Neben den endlichen Kräften spielen in der Dynamik des starren Körpers die Momentankräfte eine Rolle. Beim Stoße starrer Körper treten Kräfte von sehr großer Intensität und sehr kurzer Wirkungszeit auf. Sie bewirken eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung ohne Ortsänderung. Daß sich über die Stoßdauer erstreckende Zeitintegral der Kraft ist die Momentankraft.

In der Dynamik der Momentankräfte zerfallen die zu lösenden Aufgaben in zwei Arten, je nachdem die plötzliche Änderung des Bewegungszustandes aus den gegebenen Momentankräften oder aus gegebenen Zwangsbedingungen, denen einzelne Punkte des betrachteten Systems starrer Körper genügen müssen, berechnet werden soll. Solange die plötzlichen Zwangsbedingungen darin bestehen, daß die Wege (die Bahnkurven) einzelner Punkte des Systems vorgeschrieben sind, führt die Anwendung der für Momentankräfte umgeformten Lagrangeschen Gleichungen immer zum Ziele. Diese Gleichungen lassen sich dagegen im allgemeinen nicht anwenden, wenn einzelnen Punkten des Systems plötzlich neue Geschwindigkeiten vorgeschrieben oder aufgezwungen werden. Diese Art der Zwangsbedingungen behandelt die nachstehende Abhandlung im Falle des einzelnen starren Körpers unter vornehmlicher Benutzung vektoranalytischer Methoden.

Zu beantworten ist bei Problemen dieser Art die Frage nach dem neuen Bewegungszustande des Körpers, nach den auftretenden Momentankräften und nach der Änderung der lebendigen Kraft.

Die erste Frage wird in der Dynamik von Routh § 288 und ff. unter der Bezeichnung „plötzliche Fixierungen“ behandelt. Der Gebrauch der Vektoranalysis nötigte zu einer andern Art der Behandlung und zu einer gerade umgekehrten Zurückführung von schwierigeren Problemen auf einfachere. Diese erforderte die Benutzung des Coriolisschen Satzes von der Relativbewegung. Er ist unter Gebrauch der Vektoranalysis in wohl neuer und einfacher Art bewiesen.

Bei der Beantwortung der zweiten Frage wird auch die Theorie der Zentrifugalkräfte gestreift, deren Resultierende vektoranalytisch in einer bemerkenswert übersichtlichen Form erscheinen.

Die Antwort auf die dritte Frage geben einige teilweise

bekannte Sätze, deren Beweis hier wohl zum erstenmal in vektoranalytischer Form gegeben wird. Es wird dazu ein Ausdruck der lebendigen Kraft aufgestellt und benutzt, der die Eigentümlichkeit hat, in seiner äußeren Gestalt von einem willkürlich gewählten Bezugspunkte im Körper abhängig zu sein. Das Eigentümliche dieser Beweisführung besteht in ihrer Kürze, welche das innere Wesen der Umsetzungen enthüllt, wie dies ohne Benutzung der Vektoranalysis wohl nicht zu erreichen wäre. Letzteres zeigt ein Vergleich zwischen der hier gegebenen und der üblichen Beweisführung des Satzes von Thomson und Tait (Natural philosophy Part I § 309), des Satzes von Carnot und eines Satzes von Apell (mecanique rationelle, tome II, p. 498). Außerdem wird im folgenden eine Verallgemeinerung des Satzes von Thomson und Tait und vermittelst dieses und des von Appell gefundenen Satzes ein Satz bewiesen, der für die lebendige Kraft der Relativbewegung eine ähnliche Zerlegung angibt, wie der verallgemeinerte Satz von Thomson und Tait für die Änderung der lebendigen Kraft.

Bemerkungen.

Vektoranalytische Regeln und Operationszeichen sind in Übereinstimmung mit den Lehrbüchern: R. Gans, Vektoranalysis; Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität I gewählt.

Der Kürze halber wird die Bedeutung der in der Abhandlung sich findenden Bezeichnungen ein für allemal vorausgeschickt. Es ist immer:

S der Schwerpunkt des starren Körpers,

O ein Bezugspunkt bezw. der Anfangspunkt eines Koordinatensystems,

P ein Massenpunkt,

M die Masse des starren Körpers,

m ein Massenelement oder die Masse des Massenpunktes P,

$\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ der Radiusvektor $\overrightarrow{SP}$ bezw. $\overrightarrow{OP}$,

$\mathfrak{a}$ „ „ $\overrightarrow{SO}$,

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ der von S bezw. O zu einem Kraftangriffspunkt führende Radiusvektor,

$\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{v}_s'$ Geschwindigkeit von S eben vor bezw. nach dem Stoße,

$\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}_0'$ Geschwindigkeit von O eben vor bezw. nach dem Stoße,

$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ Geschwindigkeit von P eben vor bezw. nach dem Stoße,

$\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers nach Größe und derjenigen Richtung der Axe, die sich dem Drehsinne so, wie die Fortschreitungsrichtung der Umdrehung bei der rechtsgängigen Schraube zuordnet, zu denselben Zeiten,

$\mathfrak{B} = \Sigma\, m\, \mathfrak{v}$, $\mathfrak{B}' = \Sigma\, m\, \mathfrak{v}'$ der Impuls oder die resultierende Summe der Bewegungsgrößen,

$\mathfrak{U} = \Sigma\, [\mathfrak{r}', m\, \mathfrak{v}]$, $\mathfrak{U}' = \Sigma\, [\mathfrak{r}', m\, \mathfrak{v}']$ das Impulsmoment oder die resultierende Summe der Momente der Bewegungsgrößen in bezug auf den Punkt O, oder wenn $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$, auf den Punkt S,

L, L' die lebendige Kraft der Bewegung,

$L_{(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})}$ die lebendige Kraft der Relativbewegung,

$\mathfrak{G}$ eine Momentankraft,

$\mathfrak{P}$ eine endliche Kraft,

t, t' die Zeiten zu Anfang und zu Ende des Stoßes,

$\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ haben nach einem Koordinatensysteme zerlegt die Komponenten:

$\mathfrak{r}\,\{x, y, z;\ \mathfrak{r}'\,\{x', y', z'$.

Sonst wird die Komponente eines Vektors durch ein als Index angeschriebenes x, y oder z bezeichnet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552717_0075

§ 1. Die Momentankräfte, der Schwerpunkt und Flächensatz in Anwendung auf dieselben.

Zwei Grundgesetze der Bewegung des einzelnen materiellen Punktes lassen sich in der Form darstellen

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P}\,, \tag{1}$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}\,. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) und (2) mit dt und integriert zwischen den Zeiten t und t_0, so erhält man

$$m\,(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{P}\,dt\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{v}\,dt\,. \tag{4}$$

$\mathfrak{v}_0$ ist die Anfangsgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}_0$ der von einem festen Bezugspunkte aus gezogene Radiusvektor des materiellen Punktes zur Zeit t_0, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$ dieselben Vektoren zur Zeit t. Aus (3) erhält man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathfrak{P}\,dt\,.$$

Benutzt man diesen Wert in (4), so wird

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathfrak{P}\,dt. \tag{5}$$

Man definiert die Momentankraft als den Ausdruck $\int_{t_0}^{t} \mathfrak{P}\,dt$, wenn $(t - t_0)$ in der Grenze verschwindet, und $\lim_{t=t_0} \mathfrak{P} = \infty$ wird, und zwar derart, daß der Ausdruck $\int_{t_0}^{t} \mathfrak{P}\,dt$ endlich bleibt. Aus (3) erkennt man, daß auch $(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ endlich ist, und aus (5), daß

$$\lim_{t=t_0} (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) = O.$$

Die Momentankraft erzeugt nur eine Geschwindigkeits-, aber keine Ortsänderung.

Bedeutet das Wort „plötzlich", daß ein Wechsel in unendlich kurzer Zeit vor sich gehen soll, so kann man auch umgekehrt sagen:

Eine plötzliche endliche Geschwindigkeitsänderung kann nur durch eine Momentankraft erzeugt werden.

Dies ergibt sich aus der Gleichung (3) und der Definition der Momentankraft.

Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips leitet man aus den Gleichungen (1) und (2) die Bewegungsgleichungen des starren Körpers, insbesondere den Schwerpunktsatz und den Flächensatz[1]) ab:

$$M\frac{d\mathfrak{v}_s}{dt} = \sum \mathfrak{P} \tag{6}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum [\mathfrak{r}', m\mathfrak{v}] = \sum [\mathfrak{p}', \mathfrak{P}] \tag{7}$$

Deshalb bleiben auch die Eigenschaften der Momentankräfte bei ihrer Anwendung auf einen starren Körper erhalten. Sie bewirken Geschwindigkeits-, aber keine Ortsänderungen der Punkte des starren Körpers. Entsprechen t und t' dem Anfangs- bezw. dem Endaugenblick der Wirkung der Momentankräfte, und benutzt man die Bezeichnungsweise der vorausgeschickten Tabelle, so werden (6) und (7) nach Multiplikation mit dt und Integration

$$M(\mathfrak{v}_s' - \mathfrak{v}_s) = \int_t^{t'} \sum \mathfrak{P}\, dt = \sum \int_t^{t'} \mathfrak{P}\, dt = \sum \mathfrak{E}\,, \tag{8}$$

und, weil $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{p}'$ konstant bleiben,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}' - \mathfrak{U} &= \sum [\mathfrak{r}', m\mathfrak{v}'] - \sum [\mathfrak{r}', m\mathfrak{v}] = \\ &= \int_t^{t'} \sum [\mathfrak{p}', \mathfrak{P}]\, dt = \sum [\mathfrak{p}', \int_t^{t'} \mathfrak{P}\, dt] = \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) und (9) sind der Schwerpunkt- und der Flächensatz in der Dynamik der Momentankräfte. Sie gelten zunächst für ein festes, dann aber auch für ein bewegtes Bezugssystem; denn, da Momentankräfte keine Ortsänderungen herbeiführen, kann letzteres immer im betrachteten Augenblicke als fest angenommen werden. Da bei der Integration zwischen den unendlich nahen Grenzen t und t' der Ausdruck $\int_t^{t'} \mathfrak{P}\, dt = O$ wird, wenn $\mathfrak{P}$ endlich ist, so kann man

---

[1]) vgl. Föppl, Dynamik §§ 11 und 13.

die Wirkung endlicher Kräfte neben derjenigen der Momentankräfte vernachlässigen.

§ 2. Die nach der plötzlichen Fixierung eintretenden Geschwindigkeiten.

Nach diesen einleitenden Erörterungen soll zur Behandlung des Themas übergegangen werden. Der Bewegungszustand eines starren Körpers ist durch die (Translations-)Geschwindigkeit eines seiner Punkte O und durch die Drehgeschwindigkeit um eine Axe durch diesen Punkt gegeben. Die Geschwindigkeit eines andern Punktes P des starren Körpers ist dann durch die Vektorgleichung[1])

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] \tag{10}$$

oder bezüglich eines rechtw. Koordinatensystems durch die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_x &= \mathfrak{v}_{0x} + \mathfrak{u}_y z' - \mathfrak{u}_z y' \\ \mathfrak{v}_y &= \mathfrak{v}_{0y} + \mathfrak{u}_z x' - \mathfrak{u}_x z' \\ \mathfrak{v}_z &= \mathfrak{v}_{0z} + \mathfrak{u}_x y' - \mathfrak{u}_y x' \end{aligned} \tag{11}$$

gegeben. Sind die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_\mathrm{I}$ und $\mathfrak{v}_\mathrm{II}$ zweier Punkte $P_\mathrm{I}\,\{\mathfrak{r}_\mathrm{I}$ und $P_\mathrm{II}\,\{\mathfrak{r}_\mathrm{II}$ gegeben, so erhält man zwei Gleichungen (10) oder sechs Gleichungen (11). Wie man durch Rechnung einsieht, sind durch diese Gleichungen jedoch nicht $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_0$ bestimmt. Denn die Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, $\mathfrak{v}_\mathrm{I}$ und $\mathfrak{v}_\mathrm{II}$ sind vielmehr durch die Bedingung miteinander verknüpft, daß sie gleiche Komponenten in Richtung ihrer Verbindungsgeraden $(\mathfrak{r}_\mathrm{I} - \mathfrak{r}_\mathrm{II})$ haben müssen:

$$(\mathfrak{v}_\mathrm{I} - \mathfrak{v}_\mathrm{II})\ (\mathfrak{r}_\mathrm{I} - \mathfrak{r}_\mathrm{II}) = 0. \tag{12}$$

Erst aus den Geschwindigkeiten dreier nicht in einer Geraden liegender Punkte läßt sich $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ bestimmen. Zieht man die der Gleichung (10) analogen drei Vektorgleichungen voneinander ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_\mathrm{I} - \mathfrak{v}_\mathrm{II} &= [\mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}_\mathrm{I} - \mathfrak{r}_\mathrm{II})] \\ \mathfrak{v}_\mathrm{II} - \mathfrak{v}_\mathrm{III} &= [\mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}_\mathrm{II} - \mathfrak{r}_\mathrm{III})] \\ \mathfrak{v}_\mathrm{III} - \mathfrak{v}_\mathrm{I} &= [\mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}_\mathrm{III} - \mathfrak{r}_\mathrm{I})]. \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen oder ihre neun Komponentengleichungen genügen, um $\mathfrak{u}$ und dann aus einer der ursprünglichen Gleichungen $\mathfrak{v}_0$ zu bestimmen.

Es erhellt somit, daß, wenn mehr als 2 Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, neue Geschwindigkeiten plötzlich aufgezwungen

---

[1]) s. Abraham u. Föppl, Theorie der Elektrizität § 9.

werden, die paarweise die Bedingung (12) erfüllen müssen. der Bewegungszustand des starren Körpers damit gegeben ist. Es bleibt also nur noch der Fall übrig, daß ein oder zwei Punkte oder auch eine Gerade des freien starren Körpers plötzlich einen neuen Bewegungszustand erhalten. Der einfachste Fall, daß dieser Bewegungszustand in der absoluten Ruhe besteht, soll zunächst untersucht werden. Dieses Problem wird auch das der plötzlichen Fixierung genannt.

Die plötzliche Fixierung eines Punktes im starren Körper. Die zunächst zu beantwortende Frage ist diese:

Ein starrer Körper hat den Bewegungszustand $(\mathfrak{v}_s, \mathfrak{u})$. Plötzlich wird ein Punkt O desselben fixiert. Welches ist der Bewegungszustand nach dem Wechsel?

Der neue Bewegungszustand besteht nur noch in einer Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}'$ um eine Axe durch O. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes des starren Körpers ist nach (10) vor bezw. nach dem Wechsel

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \mathfrak{v}_s + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] \\ \mathfrak{v}' &= [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}']. \end{aligned} \tag{14}$$

Da eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung vorliegt, so greifen Momentankräfte am Körper an. Sie bestehen in momentanen Stoßreaktionen zwischen dem fixierenden Werkzeug und dem Punkt O. Ihr Moment $\Sigma\,[\mathfrak{p}'\,\mathfrak{E}]$ in bezug auf O ist demnach gleich Null. Der Flächensatz (9) für O wird mit Benutzung der Gleichungen (14)

$$\sum [\mathfrak{r}', m\,(\mathfrak{v}_s + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}])] = \sum [\mathfrak{r}', m\,[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}']]. \tag{15}$$

Wenn $\overrightarrow{SO} = \mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}. \tag{16}$$

Daher wird

$$\sum [\mathfrak{r}', m\,\mathfrak{v}_s] = \sum [(\mathfrak{r} - \mathfrak{a}), m\,\mathfrak{v}_s]$$

und wegen der Schwerpunktseigenschaft, daß

$$\sum m\,\mathfrak{r} = O, \tag{17}$$

$$\sum [\mathfrak{r}', m\,\mathfrak{v}_s] = -\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_s] \cdot \sum m = -\,M[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_s] \tag{18}$$

und

$$\begin{aligned} \sum [\mathfrak{r}', m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] &= \sum [\mathfrak{r}, m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] - [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{u}, \sum m\,\mathfrak{r}]] = \\ &= \sum [\mathfrak{r}, m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]]. \end{aligned} \tag{19}$$

Mit Benutzung der Umsetzungen (18) und (19) wird (15)

$$\sum [\mathfrak{r}', m\,[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}']] = -\,M[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_s] + \sum [\mathfrak{r}, m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]]. \tag{20}$$

Um aus $\sum [\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']]$ den Vektor $\mathfrak{u}'$ zu finden, muß man nach den Axen eines rechtw. Koordinatensystems zerlegen. Nach einer Vektorregel ist

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}\cdot(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{21}$$

Daher wird

$$\mathfrak{U}' = \sum [\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']] = \sum m\{\mathfrak{u}'\cdot\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}'\cdot(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}')\}.$$

Für die Komponentenzerlegung kann man zunächst setzen nach der Regel

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z : \\ \mathfrak{r}'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \mathfrak{u}'\mathfrak{r}' &= \mathfrak{u}_{x'}\cdot x' + \mathfrak{u}_{y'}\cdot y' + \mathfrak{u}_{z'}\cdot z' . \end{aligned} \tag{22}$$

Es werden demnach die Komponenten von $\mathfrak{U}'$

$$\mathfrak{U}'_x = \sum m\{\mathfrak{u}'_x(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(\mathfrak{u}'_x x' + \mathfrak{u}'_y y' + \mathfrak{u}'_z z')\}. \tag{23}$$

Führt man die Trägheitsmomente ein

$$T'_{11} = \sum m(y'^2 + z'^2);\quad T'_{22} = \sum m(z'^2 + x'^2);$$
$$T'_{33} = \sum m(x'^2 + y'^2)$$

und die Deviationsmomente

$$T'_{12} = T'_{21} = -\sum m x' y';\quad T'_{23} = T'_{32} = -\sum m y' z';$$
$$T'_{31} = T'_{13} = -\sum m z' x',$$

so wird $\mathfrak{U}'_x$ und ebenso $\mathfrak{U}'_y$ und $\mathfrak{U}'_z$

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}'_x &= T'_{11}\mathfrak{u}'_x + T'_{12}\mathfrak{u}'_y + T'_{13}\mathfrak{u}'_z; \\ \mathfrak{U}'_y &= T'_{21}\mathfrak{u}'_x + T'_{22}\mathfrak{u}'_y + T'_{23}\mathfrak{u}'_z; \\ \mathfrak{U}'_z &= T'_{31}\mathfrak{u}'_x + T'_{32}\mathfrak{u}'_y + T'_{33}\mathfrak{u}'_z. \end{aligned} \tag{24}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für $\sum [\mathfrak{r}, m[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]]$; man braucht nur in (24) statt der gestrichenen ungestrichene Größen zu verwenden und zu beachten, daß die T Trägheits- und Deviationsmomente um Parallelaxen durch den Schwerpunkt bedeuten. Der in (15) vorkommende Ausdruck $-M[\mathfrak{a}\mathfrak{v}_s]$ schließlich setzt sich nach einer Vektorregel aus seiner x-, y- und z-Komponente, wenn die Richtungen der x-, y- und z-Axe durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ gegeben sind, folgendermaßen zusammen:

$$-M[\mathfrak{a}\mathfrak{v}_s] = -M\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{v}_{sx} & \mathfrak{v}_{sy} & \mathfrak{v}_{sz} \end{vmatrix}. \tag{24a}$$

Man erhält somit schließlich die Komponentengleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} T'_{11}\mathfrak{u}'_x + T'_{12}\mathfrak{u}'_y + T'_{13}\mathfrak{u}'_z = T_{11}\mathfrak{u}_x + T_{12}\mathfrak{u}_y + T_{13}\mathfrak{u}_z + \\ \qquad\qquad + M(\mathfrak{v}_{sy}\mathfrak{a}_z - \mathfrak{v}_{sz}\mathfrak{a}_y) \\ T'_{21}\mathfrak{u}'_x + T'_{22}\mathfrak{u}'_y + T'_{23}\mathfrak{u}'_z = T_{21}\mathfrak{u}_x + T_{22}\mathfrak{u}_y + T_{23}\mathfrak{u}_z + \\ \qquad\qquad + M(\mathfrak{v}_{sz}\mathfrak{a}_x - \mathfrak{v}_{sx}\mathfrak{a}_z) \\ T'_{31}\mathfrak{u}'_x + T'_{32}\mathfrak{u}'_y + T'_{33}\mathfrak{u}'_z = T_{31}\mathfrak{u}_x + T_{32}\mathfrak{u}_y + T_{33}\mathfrak{u}_z + \\ \qquad\qquad + M(\mathfrak{v}_{sx}\mathfrak{a}_y - \mathfrak{v}_{sy}\mathfrak{a}_x). \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen kann $\mathfrak{u}'_x$, $\mathfrak{u}'_y$, $\mathfrak{u}'_z$ und damit $\mathfrak{u}'$ berechnet werden.

Man kann die Gleichungen (25) dadurch vereinfachen, daß man als das willkürlich in O angenommene Koordinatensystem das System der drei Hauptträgheitsaxen für O (oder der Hauptaxen des Trägheitsellipsoids) annimmt. Dann wird

$$T'_{12} = T'_{21} = 0; \quad T'_{23} = T'_{32} = 0; \quad T'_{31} = T'_{13} = 0.$$

Da zwischen den T' und T die Beziehungen

$$T'_{11} = T_{11} + M(\mathfrak{a}_y{}^2 + \mathfrak{a}_z) \text{ und 2 entsprechende}$$
$$T'_{12} = T_{12} - M(\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y) \text{ und 5 entsprechende,}$$

bestehen, so gehen die Gleichungen (25) über in

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}'_x = \dfrac{1}{T'_{11}}\{T_{11}\mathfrak{u}_x + M(\mathfrak{u}_y\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_z + \mathfrak{u}_z\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_z + \mathfrak{v}_{0y}\mathfrak{a}_z - \mathfrak{v}_{0z}\mathfrak{a}_y)\} \\ \mathfrak{u}'_y = \dfrac{1}{T'_{22}}\{T_{22}\mathfrak{u}_y + M(\mathfrak{u}_z\mathfrak{a}_y\mathfrak{a}_z + \mathfrak{u}_x\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y + \mathfrak{v}_{0z}\mathfrak{a}_x - \mathfrak{v}_{0x}\mathfrak{a}_z)\} \\ \mathfrak{u}'_z = \dfrac{1}{T'_{33}}\{T_{33}\mathfrak{u}_z + M(\mathfrak{u}_x\mathfrak{a}_z\mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}_y\mathfrak{a}_z\mathfrak{a}_y + \mathfrak{v}_{0x}\mathfrak{a}_y - \mathfrak{v}_{0y}\mathfrak{a}_x)\}. \end{cases}$$

Plötzliche Fixierung einer Geraden oder zweier Punkte im starren Körper. Im Falle der plötzlichen Fixierung einer Geraden oder zweier Punkte des starren Körpers greifen die auftretenden Momentankräfte an Punkten der plötzlich fixierten Geraden oder an den beiden plötzlich fixierten Punkten an. Ihr Moment um diese Gerade bezw. um die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte ist Null. Vektoranalytisch ist aber das Moment um eine Gerade als das skalare Produkt des Einheitsvektors dieser Geraden und des Moments bezüglich eines Punktes der Geraden definiert.[1]) Nach der Fixierung dreht sich der Körper zwangsweise um diese Gerade; der Einheitsvektor dieser Geraden ist demnach $\mathfrak{u}'_1$ und es ist

$$(27)\qquad \mathfrak{u}'_1 \cdot \sum [\mathfrak{p}'\mathfrak{G}] = 0,$$

wenn $\sum [\mathfrak{p}'\mathfrak{G}]$ das resultierende Moment bezüglich eines Punktes O

[1]) s. Föppl, Mechanik I § 17.

der fixierten Geraden bedeutet. Multipliziert man beide Seiten der Flächensatzgleichung (9) mit $\mathfrak{u}'_1$, so erhält man in Rücksicht auf (27)

$$\mathfrak{u}'_1 \cdot (\mathfrak{U}' - \mathfrak{U}) = 0. \tag{28}$$

Da man für $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ die Gleichungen (14) verwenden kann, so ist die Gleichung (28) analog einer Gleichung, die durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{u}'_1$ aus (15) oder (20) entsteht:

$$\mathfrak{u}'_1 \sum [\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']] = -M\mathfrak{u}'_1[\mathfrak{a}\mathfrak{v}_s] + \mathfrak{u}'_1 \sum [\mathfrak{r}, m[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]]. \tag{29}$$

Der Ausdruck $\mathfrak{u}'_1 \Sigma[\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']]$ läßt eine sehr einfache Bedeutung zu. Nach Regel (21) ist

$$[\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']] = m(\mathfrak{u}' \cdot \mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{u}'\mathfrak{r}').$$

Da $\mathfrak{u}'_1 = \dfrac{\mathfrak{u}'}{|\mathfrak{u}'|}$ ist, so wird

$$\mathfrak{u}'_1[\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']] = \frac{m}{|\mathfrak{u}'|}(\mathfrak{u}'^2 \cdot \mathfrak{r}'^2 - (\mathfrak{u}'\mathfrak{r}')^2) =$$

$$= \frac{m}{|\mathfrak{u}'|}(\mathfrak{u}'^2 \cdot \mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{u}'^2\mathfrak{r}'^2 \cos^2(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}')) =$$

$$= \frac{m}{|\mathfrak{u}'|}\mathfrak{u}'^2 \cdot \mathfrak{r}'^2 \sin^2(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}') =$$

$$= m|\mathfrak{u}'| \cdot \mathfrak{r}'^2 \sin^2(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}').$$

Summiert man über alle Massenelemente, so ist

$$\mathfrak{u}_1' \sum [\mathfrak{r}', m[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']] = |\mathfrak{u}'| \cdot \sum m\mathfrak{r}'^2 \sin^2(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}'). \tag{30}$$

Da $|\mathfrak{r}'|\sin(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}')$ der direkte Abstand eines Massenelements von der Geraden ist, so ist

$$\sum m\mathfrak{r}'^2 \sin^2(\mathfrak{u}'\mathfrak{r}') = \Theta$$

das Trägheitsmoment des Körpers um die Gerade. Deshalb wird (29)

$$|\mathfrak{u}'| = \frac{1}{\Theta}\left\{-M\mathfrak{u}_1'[\mathfrak{a}\mathfrak{v}_s] + \mathfrak{u}_1' \sum [\mathfrak{r}, m[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]]\right\}. \tag{31}$$

Andererseits sind aus den Gleichungen (24) und (24 a) die Komponenten der Vektoren $-M[\mathfrak{a}\mathfrak{v}_Q]$ und $\Sigma[\mathfrak{r}, m[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]]$ bekannt, und $\mathfrak{u}_{1x}'$, $\mathfrak{u}_{1y}'$, $\mathfrak{u}_{1z}'$ sind die Richtungskosinus der Richtung $\mathfrak{u}_1'$. Nach Regel (22) kann man deshalb (31) auch schreiben:

$$|\mathfrak{u}'| = \frac{1}{\Theta}\left\{-M\begin{vmatrix} l & m & n \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{v}_{sx} & \mathfrak{v}_{sy} & \mathfrak{v}_{sz} \end{vmatrix} + l(T_{11}\mathfrak{u}_x + T_{12}\mathfrak{u}_y + T_{13}\mathfrak{u}_z) + \right.$$

$$\left. + m(T_{21}\mathfrak{u}_x + T_{22}\mathfrak{u}_y + T_{23}\mathfrak{u}_z) + n(T_{31}\mathfrak{u}_x + T_{32}\mathfrak{u}_y + T_{33}\mathfrak{u}_z)\right\}. \tag{32}$$

Zurückführung des Problems der plötzlichen Geschwindigkeitswechsel auf das der plötzlichen Fixierungen. Die „plötzlichen Fixierungen“ stellen nur einen Spezialfall des Problems der plötzlichen Änderung der Geschwindigkeit eines oder zweier Punkte oder auch einer Geraden dar. Man kann jedoch die Behandlung des letzteren Problems auf die des ersteren zurückführen, indem man die Geschwindigkeitsänderung auffaßt als Fixierung eines Punktes oder einer Geraden eines Körpers in einem mit einem sich bewegenden Koordinatensysteme zuvor fest verbundenen und bewegten Raume. In diesem Sinne soll die Fixierung im bewegten Raume verstanden werden.

Wenn man die Bewegungszustände des bewegten Raumes und des Körpers auf denselben Bezugspunkt bezieht, so ist der dem Punkte oder der Geraden durch die Fixierung im bewegten Raume aufgezwungene Bewegungszustand derselbe wie der des bewegten Raumes. Hieraus ergibt sich folgende Lösungsmöglichkeit:

1. Man sucht den Bewegungszustand des starren Körpers in bezug auf einen bewegten Raum oder auch in bezug auf ein mit diesem fest verbundenes Koordinatensystem.

2. Man wendet die Gleichungen (25) bezw. (31) für die plötzliche Fixierung im bewegten Raume an.

3. Man sucht den absoluten Bewegungszustand des starren Körpers nach der „plötzlichen Fixierung“.

Diese Art der Lösung ist möglich, wenn sich nicht die Flächensatzgleichung (9), als deren Folge (25) und (31) erscheinen, bei der Anwendung auf den „bewegten Raum“ ändert. Dies zu entscheiden, gestattet der Coriolissche Satz von der Relativbewegung, der nun zunächst in möglichst einfacher Weise hier abgeleitet werden soll.

Die Relativbewegung. Man betrachte die zeitliche Änderung eines Vektors $\mathfrak{A}$ in bezug auf ein im Raume festes und auf ein bewegtes Bezugssystem. Bewegt sich das zweite Bezugs- (Koordinaten-) system parallel zum ersten, so bleiben die Komponenten eines von der Bewegung des Bezugssystems unabhängigen Vektors und seiner zeitlichen Änderung immer in beiden Systemen gleich groß. Bezeichnet $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ die zeitliche Änderung im ersten, $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ die im zweiten Systeme, so ist

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{A}}{dt}. \tag{33}$$

Der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ dagegen ist das eine Mal von dem festen, das andere Mal von dem bewegten Bezugspunkte aus gezogen. Die geometrische Differenz beider ist die Verbindungsgerade der

Bezugspunkte $\overrightarrow{OO'} = \mathfrak{a}$, diejenige ihrer zeitlichen Änderungen die Geschwindigkeit des Bezugspunktes O': $\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \mathfrak{v}_0$ oder

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}_0 + \frac{d'\mathfrak{r}}{dt}. \tag{34}$$

Gemäß (34) wird sich auch die zeitliche Änderung eines Vektors, der von $\mathfrak{r}$ abhängig ist, ändern. Ein solcher Vektor ist $\mathfrak{U} = \Sigma m\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}]$. Die Flächensatzgleichung (7) sagt aus, daß sich die Trägheitskräfte $\Sigma m\left(-\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)$ und die äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten oder

$$\Sigma\left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \Sigma\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{P}].$$

Wenn $\mathfrak{r}$ von einem im Raume festen Bezugspunkte aus gezogen ist, so kann man dafür auch setzen

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}] = \Sigma\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{P}];$$

denn da $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$, so wird das Glied $\Sigma\,[\mathfrak{v}, m\,\mathfrak{v}] = 0$. Wenn aber $\mathfrak{r}$ von einem bewegten Bezugspunkte aus gezogen ist, so ist nach (34)

$$\frac{d'\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0.$$

Deshalb wird das Glied

$$\Sigma m\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \mathfrak{v}\right] = -\,[\mathfrak{v}_0, \Sigma\, m\,\mathfrak{v}] = -\,[\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{V}]$$

und der Flächensatz wird

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{V}] = \Sigma\,[\mathfrak{p}, \mathfrak{P}]. \tag{35}$$

Besteht dagegen der Bewegungszustand des bewegten Systems nur in einer Rotation $\mathfrak{w}$ und läßt man das im Raume feste und das bewegte Bezugssystem für den betrachteten Augenblick zusammenfallen, so ist $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ die Geschwindigkeit des Endpunktes von $\mathfrak{A}$ im festen, $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ diese Geschwindigkeit relativ zum rotierenden System. Beide Geschwindigkeiten differieren um die Geschwindigkeit des Punktes im rotierenden System, der zu Anfang des betrachteten

Augenblicks mit dem Endpunkte von $\mathfrak{A}$ zusammenfiel. Es ist also, da nach Regel (10) letztere Geschwindigkeit $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{A}]$ ist,

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{A}] \text{ und} \tag{36}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{U}]. \tag{37}$$

Faßt man die Ergebnisse (35) und (37) zusammen, so hat man als Flächensatzgleichung im bewegten System

$$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{U}] + [\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{V}] = \sum [\mathfrak{p}\,\mathfrak{P}]. \tag{38}$$

Da $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{V}$ endliche Größen, so verschwindet das zweite und dritte Glied aus (38) bei Integration zwischen den unendlich nahen Grenzen t und t'. Deshalb ist die Anwendung der Gleichungen (25) und (31) auf die plötzliche Fixierung im bewegten Bezugssystem zulässig.

Der Satz von Coriolis. Anschließend soll ein Beweis des Satzes von Coriolis gegeben werden, der sich unter Anwendung der Gleichungen (34) und (36) sehr einfach gestaltet. Es ist

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{r}}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}] + \mathfrak{v}_0 \tag{a}$$

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{v}}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}]. \tag{b}$$

Man bildet aus (a) $\frac{d'\mathfrak{v}}{dt}$ und setzt diesen Wert und den Wert für $\mathfrak{v}$ in (b) ein.

$$\frac{d'\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d'^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \left[\frac{d'\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{r}\right] + \left[\mathfrak{w}\frac{d'\mathfrak{r}}{dt}\right] + \frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt}.$$

Dieser Wert wird in (b) für $\frac{d'\mathfrak{v}}{dt}$ eingesetzt und in $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}]$ für $\mathfrak{v}$ der Wert (a) geschrieben. Man erhält dann die bekannte Beziehung:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}_0] + \frac{d'^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \left[\frac{d'\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{r}\right] + [\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]] + 2\left[\mathfrak{w}\frac{d'\mathfrak{r}}{dt}\right] \tag{39}$$

den sogen. Satz von Coriolis.

(Vgl. die Ableitungen in Föppl, Dynamik S. 296 Formel 158. Dort ist ein Linkssystem benutzt ($\mathfrak{w} = -\mathfrak{w}'$) und für

$$\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt} - [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}_0] = \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} \text{ gesetzt.)}$$

Nach dieser Abschweifung soll die auf S. 12 angedeutete Lösung vollendet werden.

Die plötzliche Geschwindigkeitsänderung eines Punktes im starren Körper. Die dem Punkte O des starren Körpers plötzlich aufzuzwingende Geschwindigkeit sowie die Translationsbewegung des bewegten Raumes ist durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'_0$ gegeben. Der absolute Bewegungszustand des starren Körpers ist $\mathfrak{v}_s$ und $\mathfrak{u}$, der Bewegungszustand relativ zum bewegten Raum ist $(\mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}'_0)$ und $\mathfrak{u}$.

Die Anwendung der Gleichung (25) für die Fixierung im „bewegten Raum" gibt

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} T'_{11}\,\mathfrak{u}'_x + T'_{12}\,\mathfrak{u}'_y + T'_{13}\,\mathfrak{u}'_z &= T_{11}\,\mathfrak{u}_x + T_{12}\,\mathfrak{u}_y + T_{13}\,\mathfrak{u}_z + \\ &\quad + M\left\{(\mathfrak{v}_{sy} - \mathfrak{v}'_{0y})\,\mathfrak{a}_z - (\mathfrak{v}_{sz} - \mathfrak{v}'_{0z})\,\mathfrak{a}_y\right\} \\ T'_{21}\,\mathfrak{u}'_x + T'_{22}\,\mathfrak{u}'_y + T'_{23}\cdot\mathfrak{u}'_z &= T_{21}\,\mathfrak{u}_x + T_{22}\,\mathfrak{u}_y + T_{23}\,\mathfrak{u}_z + \\ &\quad + M\left\{\mathfrak{v}_{sz} - \mathfrak{v}'_{0z})\,\mathfrak{a}_x - (\mathfrak{v}_{sx} - \mathfrak{v}'_{0x})\,\mathfrak{a}_z\right\} \\ T'_{31}\,\mathfrak{u}'_x + T'_{32}\,\mathfrak{u}'_y + T'_{33}\,\mathfrak{u}'_z &= T_{31}\,\mathfrak{u}_x + T_{32}\,\mathfrak{u}_y + T_{33}\,\mathfrak{u}_z + \\ &\quad + M\left\{(\mathfrak{v}_{sx} - \mathfrak{v}'_{0x})\,\mathfrak{a}_y - (\mathfrak{v}_{sy} - \mathfrak{v}'_{0y})\,\mathfrak{a}_x\right\}. \end{aligned}\right.$$

Die plötzliche Änderung des Bewegungszustandes einer Geraden im starren Körper. Der der Geraden plötzlich aufzuzwingende Bewegungszustand und der Bewegungszustand des bewegten Raumes ist bezüglich des auf der Geraden liegenden Bezugspunktes O durch $\mathfrak{v}'_0$ und $\mathfrak{w}$ gegeben. Ist der absolute Bewegungszustand des starren Körpers $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$, so ist sein Bewegungszustand relativ zum bewegten Raum durch $(\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}'_0)$ und $(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})$ gegeben.

Setzt man in der Gleichung (31)

$$\mathfrak{v}_s = \mathfrak{v}_0 - [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}]$$

und für $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ die analogen Werte in bezug auf den bewegten Raum, nämlich statt $\mathfrak{v}_0$: $(\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}'_0)$ und statt $\mathfrak{u}$ den Vektor $(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})$, so erhält man für die Drehgeschwindigkeit im Endaugenblick des Wechsels in bezug auf den bewegten Raum

$$|\mathfrak{u}''| = \frac{\mathfrak{u}_1''}{\Theta}\left\{- M\left[\mathfrak{a}\,(\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}'_0)\right] + \sum m\left[\mathfrak{a}\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{a}\right]\right] + \right.$$
$$\left. + \sum m\left[\mathfrak{r}\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{r}\right]\right]\right\}.$$

Da $\sum m\left[\mathfrak{r}'\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{r}'\right]\right] = M\left[\mathfrak{a}\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{a}\right]\right] + \sum m\left[\mathfrak{r}\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{r}\right]\right]$ ist, so kann man auch schreiben

$$(41)\qquad |\mathfrak{u}''| = \frac{\mathfrak{u}_1''}{\Theta}\left\{- M\left[\mathfrak{a}\,(\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}_0')\right] + \sum m\left[\mathfrak{r}'\left[(\mathfrak{u} - \mathfrak{w})\,\mathfrak{r}'\right]\right]\right\}.$$

Zwischen der absoluten Rotation und der Rotation in bezug auf den bewegten Raum besteht die Beziehung

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'' + \mathfrak{w}.$$

$\mathfrak{u}''$ hat die Richtung der dem plötzlichen Wechsel unterworfenen Geraden $\mathfrak{u}_1'' = \mathfrak{g}_1$. Es ist also

$$(42) \qquad \mathfrak{u}' = \mathfrak{w} + \mathfrak{g}_1 \left\{ \frac{\mathfrak{g}_1}{\Theta} \left(- M [\mathfrak{a} (\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}_0')] + \sum m [\mathfrak{r}' [(\mathfrak{u} - \mathfrak{w}) \mathfrak{r}']] \right) \right.$$

Besteht in bezug auf die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids für O die Äquivalenz

$$\mathfrak{g}_1 \{ l, m, n \text{ und } \mathfrak{r}' \{ x', y' z',$$

so kann man den $\{\}$ Ausdruck in (42) auch schreiben:

$$(43) \quad \{\} = - \frac{M}{\Theta} \begin{vmatrix} l & m & n \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{v}_{0x} - \mathfrak{v}'_{0x} & \mathfrak{v}_{0y} - \mathfrak{v}'_{0y} & \mathfrak{v}_{0z} - \mathfrak{v}'_{0z} \end{vmatrix} + \frac{l}{\Theta} T'_{11} (\mathfrak{u}_x - \mathfrak{w}_x) + \\ + \frac{m}{\Theta} T'_{22} (\mathfrak{u}_y - \mathfrak{w}_y) + \frac{n}{\Theta} T'_{33} \mathfrak{u}_z - \mathfrak{w}_z).$$

Führt man noch die bekannte Beziehung $\Theta = T'_{11} \cdot l^2 + T'_{22} \cdot m^2 + T'_{33} n^2$ ein, indem man setzt

$$\mathfrak{w} = \frac{T'_{11} \cdot l^2 + T'_{22} m^2 + T'_{33} n^2}{\Theta} \mathfrak{w},$$

und setzt man zur Abkürzung

$$D = M \begin{vmatrix} l & m & n \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{v}_{0x} - \mathfrak{v}'_{0x} & \mathfrak{v}_{0y} - \mathfrak{v}'_{0y} & \mathfrak{v}_{0z} - \mathfrak{v}'_{0z} \end{vmatrix} + l T'_{11} \mathfrak{u}_x + m T'_{22} \mathfrak{u}_y + \\ + n T'_{33} \mathfrak{u}_z,$$

so erhält man als Komponentengleichungen von (42) bezogen auf die Hauptaxen für den Punkt O

$$(44) \quad \begin{cases} \mathfrak{u}'_x = \frac{1}{\Theta} \left\{ l D + m T'_{22} (m \mathfrak{w}_x - l \mathfrak{w}_y) - n T'_{33} l \mathfrak{w}_z - n \mathfrak{w}_x) \right\} \\ \mathfrak{u}'_y = \frac{1}{\Theta} \left\{ m D + n T'_{33} (n \mathfrak{w}_y - m \mathfrak{w}_z) - l T'_{11} (m \mathfrak{w}_x - l \mathfrak{w}_y) \right\} \\ \mathfrak{u}'_z = \frac{1}{\Theta} \left\{ n D + l T'_{11} (l \mathfrak{w}_z - n \mathfrak{w}_x) - m T'_{22} (n \mathfrak{w}_y - m \mathfrak{w}_z) \right\}. \end{cases}$$

Plötzliche Änderung der Bewegung zweier Punkte im starren Körper. Auf den Fall der plötzlich fixierten bezw. in ihrer Geschwindigkeit geänderten Geraden soll auch die plötzliche Änderung des Bewegungszustandes zweier Punkte im starren Körper zurückgeführt werden. Die beiden Punkte seien O_{I} und O^{II} mit dem von S aus gezogenen Radiivektoren $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}$, ihre Geschwindig-

keiten vor bezw. nach dem Wechsel $\mathfrak{v}_{0\mathrm{I}}$ bezw. $\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{v}_{0\mathrm{II}}$ bezw. $\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}}$. Die Länge $O_\mathrm{I}O_\mathrm{II}=\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_1$ sei L. Nach Gleichung (10) ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} &= \mathfrak{v}'_s + [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{a}_\mathrm{I}]\\ \mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}} &= \mathfrak{v}'_s + [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{a}_\mathrm{II}].\end{aligned} \tag{45}$$

Wenn aber $\mathfrak{w}$ die Drehgeschwindigkeit der Geraden $O_\mathrm{I}O_\mathrm{II}$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}} = \mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} + [\mathfrak{w}\,(\mathfrak{a}_\mathrm{II}-\mathfrak{a}_\mathrm{I})]. \tag{46}$$

Für (46) kann man auch schreiben, wenn man, zwecks Zurückführung auf das vorbehandelte Problem

$$\begin{aligned}O_\mathrm{I} &\equiv O\\ \mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} &= \mathfrak{v}'_0\\ (\mathfrak{a}_\mathrm{II}-\mathfrak{a}_\mathrm{I}) &= \mathfrak{g}_1\cdot L.\end{aligned}$$

annimmt,

$$\frac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}}}{L} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{g}_1], \tag{47}$$

oder in Komponenten nach den Hauptaxen für O_I

$$\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}x}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}x}}{L} = n\,\mathfrak{w}_y - m\,\mathfrak{w}_z\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}y}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}y}}{L} = l\,\mathfrak{w}_z - n\,\mathfrak{w}_x\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}z}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}z}}{L} = m\,\mathfrak{w}_x - l\,\mathfrak{w}_y\,.\end{cases} \tag{48}$$

Die Ausdrücke rechts in diesen Gleichungen sind genau gleich den eingeklammerten Koeffizienten der T in (44). Ersetzt man sie durch die in (48) gegebenen Ausdrücke, so hat man die Lösung des Problems:

$$\begin{cases}\mathfrak{u}'_x = \dfrac{1}{\Theta}\left\{l\,D + mT'_{22}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}z}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}z}}{L} - nT'_{33}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}y}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}y}}{L}\right\}\\[2ex] \mathfrak{u}'_y = \dfrac{1}{\Theta}\left\{m\,D + nT'_{33}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}x}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}x}}{L} - lT'_{11}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}z}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}z}}{L}\right\}\\[2ex] \mathfrak{u}'_z = \dfrac{1}{\Theta}\left\{n\,D + lT'_{11}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}y}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}y}}{L} - mT'_{22}\,\dfrac{\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}x}-\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}x}}{L}\right\}.\end{cases} \tag{49}$$

Wenn der Körper nicht frei ist, sondern in einem Punkte O_I schon einen Zwangsbewegungszustand erleidet, so werden bei plötzlicher Fixierung oder Änderung eines zweiten Punktes O_II oder einer Geraden durch O_I nicht allein an O_II Momentankräfte angreifen, sondern auch am Punkte O_I bezw. an allen Puukten der durch O_I gehenden Geraden. Ihr Moment um die Gerade $O_\mathrm{I}O_\mathrm{II}$ bezw. um die durch O_I gehende Gerade verschwindet. Man kann deshalb zur Auffindung von $\mathfrak{u}'$ direkt die Gleichungen (31) bezw. (44) oder (49) verwenden.

§ 3. Die bei der plötzlichen Fixierung oder Änderung auftretenden Momentankräfte und Momentankräftepaare.

Die Resultierende aller bei der plötzlichen Eixierung auftretenden Momentankräfte findet man aus dem Schwerpunktsatz (8)

$$\sum \mathfrak{E} = M(\mathfrak{v}'_s - \mathfrak{v}'_s), \tag{50}$$

wo $\mathfrak{v}'_s$ aus den bekannten Vektoren $\mathfrak{v}'_0$ bezw. $\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{u}'$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{v}'_s = \mathfrak{v}'_0 - [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{a}]$$

bezw.

$$\mathfrak{v}'_s = \mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} - [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{a}_\mathrm{I}]$$

zu berechnen ist. Bei der plötzlichen Fixierung einer Geraden tritt außerdem noch ein Momentankräftepaar auf. Man findet es, wenn man die Flächensatzgleichung (9) für einen Punkt O bezw. O_I der Geraden anschreibt:

$$\sum [\mathfrak{p}'\,\mathfrak{E}] = \sum [\mathfrak{r}', m\,\mathfrak{v}'] - \sum [\mathfrak{r}', m\,\mathfrak{v}] =$$
$$= \sum [\mathfrak{r}', m(\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}_0)] + \sum [\mathfrak{r}', m[(\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\,\mathfrak{r}']] .$$

Denn es ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']$$
$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'_0 + [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'].$$

Da $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}$, so ist

$$\sum [\mathfrak{r}', m(\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}_0)] = - M[\mathfrak{a}, (\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}_0)]$$

und es wird

$$\sum [\mathfrak{p}'\,\mathfrak{E}] = - M[\mathfrak{a}(\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}_0)] + \sum [\mathfrak{r}', m[(\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\,\mathfrak{r}']]. \tag{51}$$

Um die bei der plötzlichen Fixierung oder Geschwindigkeitsänderung zweier Punkte O_I und O_II an jedem der Punkte auftretenden resultierenden Momentankräfte $\mathfrak{E}_\mathrm{I}$ und $\mathfrak{E}_\mathrm{II}$ kennen zu lernen, hat man drei Vektorgleichungen: den Flächensatz für O_I, den für O_II und den Schwerpunktsatz. Es sei $\overrightarrow{O_\mathrm{I}P} = \mathfrak{r}'_\mathrm{I}$, $\overrightarrow{O_\mathrm{II}P} = \mathfrak{r}'_\mathrm{II}$, $\overrightarrow{SO_\mathrm{I}} = \mathfrak{a}_\mathrm{I}$, $\overrightarrow{SO_\mathrm{II}} = \mathfrak{a}_\mathrm{II}$.

Flächensatz für O_I:

$$[(\mathfrak{a}_\mathrm{II} - \mathfrak{a}_\mathrm{I}), \mathfrak{E}_\mathrm{II}] = - M[\mathfrak{a}_\mathrm{I}, m(\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} - \mathfrak{v}_{0\mathrm{I}})] + \sum [\mathfrak{r}_\mathrm{I}', m[(\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\,\mathfrak{r}_\mathrm{I}']]. \tag{52}$$

Flächensatz für O_II:

$$[(\mathfrak{a}_\mathrm{I} - \mathfrak{a}_\mathrm{II}), \mathfrak{E}_\mathrm{I}] = - M[\mathfrak{a}_\mathrm{II}, m(\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}} - \mathfrak{v}_{0\mathrm{II}})] +$$
$$+ \sum [\mathfrak{r}'_\mathrm{II}, m[(\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\,\mathfrak{r}'_\mathrm{II}]]. \tag{53}$$

Schwerpunktsatz:

$$\mathfrak{E}_\mathrm{I} + \mathfrak{E}_\mathrm{II} = M(\mathfrak{v}_s' - \mathfrak{v}_s). \tag{54}$$

Diese drei Gleichungen (52), (53) und (54) sind jedoch nicht hinreichend, um $\mathfrak{E}_I$ und $\mathfrak{E}_{II}$ vollständig zu bestimmen. Zerlegt man nach einem Koordinatensystem, dessen $O_I z$-Axe die Richtung $O_I O_{II}$ ist, so hat letztere Richtung oder die Richtung von $(\mathfrak{a}_{II} - \mathfrak{a}_I)$ die Richtungskosinus $l = o$, $m = o$, $n = 1$. Sind die Komponenten von $\mathfrak{E}_I$ und $\mathfrak{E}_{II}$

$$X_I, Y_I, Z_I \text{ bezw. } X_{II}, Y_{II}, Z_{II},$$

so sind nach den vorstehenden Gleichungen berechenbar die Summen

$$X_I + X_{II}, Y_I + Y_{II}, Z_I + Z_{II}$$

und die Unterdeterminanten von

$$\frac{1}{L}\left[(\mathfrak{a}_I - \mathfrak{a}_{II})\,\mathfrak{E}_I\right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ o & o & 1 \\ X_I & Y_I & Z_I \end{vmatrix}. \tag{55}$$

In (55) verschwindet Z_I, und ebenso in der analog gebildeten Determinante für $\frac{1}{L}\left[(\mathfrak{a}_{II} - \mathfrak{a}_I)\,\mathfrak{E}_{II}\right]$ die Größe Z_{II}. Die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}_I$ und $\mathfrak{E}_{II}$ in Richtung der Geraden $O_I O_{II}$ sind deshalb unbestimmt, die senkrecht dazu stehenden Komponenten aber kann man berechnen, und man kennt auch noch die Summe $Z_I + Z_{II}$.

Die Resultierende der Zentrifugalkräfte. Sofort nach der Wirkung der Momentankräfte treten an dem fixierten Punkte oder an der fixierten Geraden die Zentrifugalkräfte auf. Um ein vollständiges Bild der zeitlichen Veränderung der an dem fixierten Punkte oder der fixierten Axe wirkenden Kräfte zu geben, soll auch ihre resultierende Summe und ihr resultierendes Moment kurz abgeleitet werden. Im Falle des fixierten Punktes oder der fixierten Axe ist der Bewegungszustand des starren Körpers immer darstellbar durch die Formel

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}], \tag{56}$$

in der $\mathfrak{r}$ den von dem fixierten Punkte oder einem Punkte der fixierten Axe aus gezogenen Radiusvektor bedeutet. Wird ein festes Bezugssystem angenommen, so ist auch

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \tag{57}$$

Die Zentrifugalkräfte sind diejenigen Komponenten der Trägheitskräfte $m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$, deren Richtungslinie durch die Axe geht. Es ist

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{u}}{dt}, \mathfrak{r}\right] + \left[\mathfrak{u}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]. \tag{58}$$

Im Falle der fixierten Axe ist die Richtung von $\mathfrak{u}$ konstant,

oder es ist $\mathfrak{u}$ parallel zu $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$. Es hat deshalb das erste Glied rechts in (58) die Richtung der Bahntangente des betr. Massenpunktes nämlich die Richtung $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] = \mathfrak{v}$. Der zweite Vektor rechts steht aber senkrecht auf $\mathfrak{u}$ und der Bahntangente; seine Richtungslinie geht durch die Axe. Die Summierung über alle Massenpunkte des Körpers ergibt bei diesem Gliede die Summe der durch die Axe gehenden Trägheitskräfte oder die resultierende Zentrifugalkraft:

$$\textbf{(59)} \qquad \sum m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}] = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{B}] = M[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}_s].$$

Das resultierende Moment aber ist

$$(60) \qquad \sum m\,[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]].$$

Nach der Vektorregel

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]] + [\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]] + [\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]] = o \text{ ist}$$
$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]] = -[\mathfrak{u}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}]] + [\mathfrak{v}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] = [\mathfrak{u}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}]],$$

da $[\mathfrak{v}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = o$ ist.

Somit wird (60) oder das resultierende Moment der Zentrifugalkräfte

$$\textbf{(61)} \qquad \sum m\,[\mathfrak{r}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]] = \sum m\,[\mathfrak{u}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}]] = [\mathfrak{u}\sum[\mathfrak{r},\, m\,\mathfrak{v}]] = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{U}].$$

Da $\mathfrak{v}_s$ auf $\mathfrak{u}$ senkrecht steht, so kann man sagen:

Satz 1. Die Resultierende der Zentrifugalkräfte ist gleich dem Vektorprodukt aus Rotation und resultierender Bewegungsgröße des Körpers gleich $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{B}]$.

Satz 2. Das resultierende Moment der Zentrifugalkräfte ist gleich dem Vektorprodukt aus Rotation und Impulsmoment des rotierenden Körpers gleich $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{U}]$.

§ 4. Die lebendige Kraft des Körpers vor und nach dem Wechsel.

Die lebendige Kraft der Bewegung eines starren Körpers ist bekanntlich gegeben durch

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\,\mathfrak{v}^2.$$

Dieser Ausdruck soll den Zwecken der Vektorenrechnung entsprechend umgestaltet werden. Es ist

$$2L = \sum m\,\mathfrak{v}^2 = \sum m(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'])^2$$

oder

$$2L = \sum m\{\mathfrak{v}_0{}^2 + \mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] + \mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']^2\}$$
$$= \sum m\{\mathfrak{v}_0(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']) + \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'\mathfrak{v}_0] + \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']]\}.$$

Die Umformung der beiden letzten Glieder ist statthaft wegen der Vektorregel

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]. \tag{62}$$

Es wird schließlich, da

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'],$$

$$2L = \sum m\{\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{v} + \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']]\} = \sum m\{\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{v} + \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{v}]\} = \tag{63}$$
$$= \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{B} + \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}.$$

Dieser Ausdruck hat die Eigentümlichkeit, von einem beliebig im Körper gewählten Bezugspunkte abhängig zu sein. Wählt man als diesen Bezugspunkt den Schwerpunkt und als Bezugsaxen die Hauptaxen, so erhält man die schon bekannte Form

$$L = \tfrac{1}{2} M \mathfrak{v}_s^2 + \tfrac{1}{2} T_{11}\,\mathfrak{u}_x^2 + \tfrac{1}{2} T_{22}\,\mathfrak{u}_y^2 + \tfrac{1}{2} T_{33}\mathfrak{u}_z^2,$$

Durch diese Formel ist L als Funktion der bekannten Vektoren $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{U}$ dargestellt.

Vermittelst dieses neugewonnenen Ausdrucks für die lebendige Kraft sollen einige Sätze abgeleitet werden, welche den Verlust an lebendiger Kraft, den der starre Körper erleidet, und die lebendige Kraft der Relativbewegung $L_{(\mathfrak{v}' - \mathfrak{v})} = \sum \frac{1}{2} m(\mathfrak{v}' - \mathfrak{v})^2$ in Beziehung zu den auftretenden Momentankräften und zu den Geschwindigkeiten vor und nach dem Wechsel bringen. Ihre Anwendungsmöglichkeit auf die Probleme der plötzlichen Fixierung soll gezeigt werden.

Ableitung des Satzes von Thomson und Tait (Natural Philosophy Art. 309). Eine Momentankraft $\mathfrak{E}$ greift an einem Punkte O eines starren Körpers an. Sind t und t' die Anfangs- bezw. Endzeit ihrer Wirkung, und benutzt man die Bezeichnung der Tabelle, so ist

$$2(L' - L) = \mathfrak{v}'_0\,\mathfrak{B}' + \mathfrak{u}'\,\mathfrak{U}' - \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{B} - \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}. \tag{64}$$

Sind die Vektorgrößen auf den Angriffspunkt O der Momentankraft als Bezugspunkt bezogen, so ist

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}$$
$$\mathfrak{B}' - \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \text{ und es wird} \tag{65}$$

$$\mathfrak{u}'\,\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{u}'\,\mathfrak{U} - \mathfrak{u}\,\mathfrak{U}' =$$
$$= \sum m\{\mathfrak{u}'[\mathfrak{r}'(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'])] - \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'(\mathfrak{v}'_0 + [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'])]\} =$$
$$= \sum m\{\mathfrak{u}'[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{v}_0] - \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{v}'_0] + \mathfrak{u}'[\mathfrak{r}'[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']] - \mathfrak{u}[\mathfrak{r}'[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}']]\}$$

Wegen Regel (62) wird dieses

$$= \sum m\{\mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'] - \mathfrak{v}'_0[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] + [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'] \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] - [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] \cdot [\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}']\}$$
$$= \sum m\{\mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'] - \mathfrak{v}'_0[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']\} =$$
$$= \sum m\{\mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}'\,\mathfrak{r}'] - \mathfrak{v}'_0[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}'] + \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{v}'_0 - \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{v}'_0\} = \tag{66}$$
$$= \sum m\{\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}'_0\,\mathfrak{v}\} = \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{B}' - \mathfrak{v}'_0\,\mathfrak{B}.$$

Unter Berücksichtigung von (66) ergibt (64):

$$2(L' - L) = (\mathfrak{v}'_0(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}) + \mathfrak{v}_0(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}) = (\mathfrak{v}'_0 + \mathfrak{v}_0)(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}).$$

Schließlich erhält man den Satz von Thomson und Tait, wenn man (65) berücksichtigt:

(67) $$L' - L = \mathfrak{E} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{v}'_0 + \mathfrak{v}_0).$$

Bevor dieser Satz ausgesprochen werden soll, soll noch ein ganz analoger für das Momentankräftepaar abgeleitet werden. Wenn ein Momentankräftepaar $\mathfrak{K}$ auf den starren Körper um eine Axe durch S wirkt, so ist $\Sigma\mathfrak{E} = o$ und deshalb

(68) $$\mathfrak{B}' - \mathfrak{B} = O$$

(69) $$\mathfrak{U}' - \mathfrak{U} = \mathfrak{K}$$

(70) $$\mathfrak{v}_s = \mathfrak{v}'_s.$$

Wenn man die Vektoren auf den Schwerpunkt bezieht, so nimmt die Beziehung (64) die Form an

(71) $$2(L' - L) = \mathfrak{v}'_s\mathfrak{B}' + \mathfrak{u}'\mathfrak{U}' - \mathfrak{v}_s\mathfrak{B} - \mathfrak{u}\mathfrak{U}.$$

Es ist wegen (68) und (70)

$$\mathfrak{v}'_s\mathfrak{B}' - \mathfrak{v}_s\mathfrak{B} = O$$

Da auf den Schwerpunkt bezogen die Form

$$\mathfrak{U} = \sum m\left[\mathfrak{r}, (\mathfrak{v}_s + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}])\right] = \sum m\left[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\right]$$

und $\mathfrak{U}'$ die Form

$$\mathfrak{U}' = \sum m\left[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{u}'\mathfrak{r}]\right]$$

annimmt v, so ist

$$\mathfrak{u}\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}'\mathfrak{U} = \sum m\left\{\mathfrak{u}\left[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{u},\mathfrak{r}]\right] - \mathfrak{u}'\left[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\right]\right\} = O$$

(wegen der Beziehung 62).

Es wird also

$$2(L' - L) = \mathfrak{u}'\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}\mathfrak{U} = \mathfrak{u}'\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}\mathfrak{U} + (\mathfrak{u}\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}'\mathfrak{U}) = (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u})(\mathfrak{U}' - \mathfrak{U}) = (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}).\ \mathfrak{K} \text{ oder}$$

(72) $$L' - L = \mathfrak{K} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}).$$

Satz. Wirkt eine Momentankraft oder ein Momentankräftepaar auf einen starren Körper, so ist die Änderung der lebendigen Kraft gleich dem halben skalaren Produkte aus der Kraft bezw. dem Paar und der geometrischen Summe der Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Angriffspunktes bezw. der Anfangs- und Endrotation. (Der eine Teil dieses Satzes findet sich in Thomson and Tait, Natural Philosophy, Art. 309.)

Daneben stellt sich ein allgemeinerer Satz, der auch für den Fall

gilt, daß mehrere Momentankräfte an verschiedenen Punkten des starren Körpers angreifen. Es ist in diesem Falle:

$$\mathfrak{B}' - \mathfrak{B} = \sum \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{U}' - \mathfrak{U} = \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}].$$

Man kann deshalb in Gleichung (64) setzen:

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{U} - \mathfrak{u}\mathfrak{U}' = \mathfrak{u}'(\mathfrak{U} + \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}]) - \mathfrak{u}(\mathfrak{U}' - \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}]) =$$
$$= \mathfrak{u}'\mathfrak{U} - \mathfrak{u}\mathfrak{U}' + \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}) \cdot (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}) \text{ und}$$

da nach (66)

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}\mathfrak{U} = \mathfrak{v}_0 \mathfrak{B}' - \mathfrak{v}'_0 \mathfrak{B} \text{ ist, so}$$

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{U}' - \mathfrak{u}\mathfrak{U} = \mathfrak{v}_0 \mathfrak{B}' - \mathfrak{v}'_0 \mathfrak{B} + \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}] \cdot (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}).$$

Dann wird also aus (64), da $\mathfrak{B}' - \mathfrak{B} = \sum \mathfrak{E}$

$$L' - L = (\mathfrak{v}'_0 + \mathfrak{v}_0) \tfrac{1}{2} \cdot \sum \mathfrak{E} + (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}) \cdot \tfrac{1}{2} \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}[. \tag{73}$$

Da die Geschwindigkeit eines Angriffspunktes der Momentankraft $\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{p}']$ bezw. $\mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}'\mathfrak{p}']$ ist, und man nach Regel (62) auch schreiben kann $\mathfrak{u}'[\mathfrak{p}'\mathfrak{E}] = \mathfrak{E} \cdot [\mathfrak{u}'\mathfrak{p}']$ bezw. $\mathfrak{u}[\mathfrak{p}'\mathfrak{E}] = \mathfrak{E}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{p}']$, so kann man (73) auch die Form geben

$$L' - L = \sum \left(\mathfrak{E} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{v}'_0 + \mathfrak{v}_0)\right), \tag{74}$$

worin $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_0'$ die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte bedeutet.

Satz: Die Änderung der lebendigen Kraft ist gleich der halben Summe der skalaren Produkte je aus einer Momentankraft mal der geometrischen Summe aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

Anwendung auf die plötzlichen Fixierungen. Wendet man die gefundenen Sätze auf die plötzlichen Fixierungen an, so hat man:

I. Für die plötzliche absolute Fixierung

1) eines Punktes gilt:

$$L' - L = \mathfrak{E} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{v}_0$$

2) einer Geraden, wenn O auf der Geraden liegt, gilt

$$L' - L = \mathfrak{v}_0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sum \mathfrak{E} + (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sum [\mathfrak{p}' \mathfrak{E}]$$

3) zweier Punkte gilt:

$$L' - L = \mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{v}_{0\mathrm{I}} + \mathfrak{E}_\mathrm{II} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{v}_{0\mathrm{II}}.$$

II. Für den Fall der plötzlichen Änderung treten in den gefundenen Gleichungen keine weiteren Vereinfachungen ein. Für die plötzliche Änderung der Bewegung zweier Punkte lautet die Beziehung:

$$L' - L = \mathfrak{E}_\mathrm{I} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{v}'_{0\mathrm{I}} + \mathfrak{v}_{0\mathrm{I}}) + \mathfrak{E}_\mathrm{II} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{v}'_{0\mathrm{II}} + \mathfrak{v}_{0\mathrm{II}}).$$

Ableitung einer ähnlichen Beziehung für die lebendige Kraft der Relativbewegung. Die lebendige Kraft der Relativbewegung ist definiert durch

$$L_{(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})} = \tfrac{1}{2}\sum m(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})^2 = \\ = \tfrac{1}{2}\{(\mathfrak{v}'_0-\mathfrak{v}_0)(\mathfrak{V}'-\mathfrak{V}) + (\mathfrak{u}'-\mathfrak{u})(\mathfrak{U}'-\mathfrak{U})\}.$$

Bei Wirkung von Momentankräften ist

$$\mathfrak{V}'-\mathfrak{V} = \sum \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{U}'-\mathfrak{U} = \sum [\mathfrak{p}'\mathfrak{E}].$$

Deshalb wird

$$2L_{(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})} = (\mathfrak{v}'_0-\mathfrak{v}_0)\cdot\sum\mathfrak{E} + (\mathfrak{u}'-\mathfrak{u})\cdot\sum[\mathfrak{p}'\mathfrak{E}]. \tag{75}$$

Die Geschwindigkeit eines Angriffspunktes der Momentankraft ist $\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{p}']$ bezw. $\mathfrak{v}'_0 + [\mathfrak{u}'\mathfrak{p}']$. Unter Beachtueg der Regel (62) wird deshalb (75):

$$L_{(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})} = \sum(\mathfrak{E}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(\mathfrak{v}'_0-\mathfrak{v}_0)), \tag{76}$$

worin aber $\mathfrak{v}'_0$ und $\mathfrak{v}_0$ Geschwindigkeiten eines Angriffspunktes bezeichnen.

Satz: Wirken Momentankräfte auf einen Körper, so ist die lebendige Kraft der Relativbewegung zwischen Anfang und Ende ihrer Wirkungszeit gleich der halben Summe der skalaren Produkte aus je einer Momentankraft und der geom. Differenz der End- und Anfangsgeschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

Ableitung eines Satzes von Appell. Addiert man (74) und (76), so erhält man

$$L'-L = -L_{(\mathfrak{v}'-\mathfrak{v})} + \sum(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}'_0). \tag{77}$$

Satz: Die Summe der Produkte je einer Momentankraft in die Endgeschwindigkeit ihres Angriffspunktes ist gleich der Änderung der lebendigen Kraft vermehrt um die lebendige Kraft der Relativbewegung. (Diesen Satz findet man bei Appell: Traité de mecanique rationelle art. 520.)

Man hätte diesen Satz natürlich ebenfalls aus dem Ausdruck (63) für die lebendige Kraft entwickeln können, da die Sätze (74) und (75) aus denen man ihn erhielt, ebenfalls vermittelst des Ausdrucks (63) abgeleitet sind.

Der Satz von Carnot. Wenn zwei oder mehrere vollkommen glatte oder vollkommen rauhe starre Körper gegeneinander stoßen, so entstehen Momentankräfte $\mathfrak{J}$ und Endgeschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, d. i. der gemeinsamen Berührungspunkte $\mathfrak{v}'_0$ derart, daß $\Sigma\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{v}'_0 = o$ wird. Der Stoßkraft $\mathfrak{J}$ nämlich, die an dem einen Körper angreift, steht die Stoßreaktion $(-\mathfrak{J})$ gegenüber, die

an dem zweiten Körper angreift. Die Summe sämtlicher an dem Systeme starrer Körper angreifenden Momentankräfte ist deshalb gleich Null. Bei vollkommen glatten Oberflächen gleiten die Oberflächen übereinander und $\mathfrak{J}$ steht, da keine Reibung vorhanden, senkrecht zur gemeinsamen Oberfläche. In Richtung der Normalen ist aber die Komponente der Endgeschwindigkeit der sich berührenden kleinen Flächen gleich groß und es ist deshalb $\Sigma(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{v}'_0) = o$.

Sind die Oberflächen vollkommen rauh, so daß ein Übereinandergleiten vermieden wird, so sind die Endgeschwindigkeiten der sich berührenden kleinen Stoßflächen genau gleich groß, und es ist deshalb auch hier $\Sigma(\mathfrak{J}\mathfrak{v}'_0) = o$.

Wirken also auf ein System starrer Körper nur innere Reaktionen $\mathfrak{J}$, so ist $\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{v}'_0 = o$, und unter Zuhilfenahme von (77) wird

$$L' - L = -L_{(\mathfrak{v}' - \mathfrak{v})} \tag{78}$$

Der Gültigkeitsbereich des Satzes von Carnot. Die Gleichung (77) ist auch geeignet, den Gültigkeitsbereich des Carnotschen Satzes (78) genau zu umschreiben. Er gilt zunächst, wie oben schon gesagt, für den Stoß starrer Körper. Dann gilt er aber auch für Momentankräfte, die dadurch entstehen, daß plötzlich neue Bedingungen eingeführt werden, durch die einige Massenpunkte gezwungen werden, eine neue Bahn einzuschlagen. (Vgl. Routh, Dynamik I, 7 § 379.) Der Carnotsche Satz gilt aber auch bei der absoluten plötzlichen Fixierung. Denn die Endgeschwindigkeiten der Angriffspunkte der Momentankräfte sind Null und deshalb ist $\Sigma\mathfrak{F}\mathfrak{v}'_0 = o$. Aus dem Satze (77) folgt daher (78). Bei der plötzlichen Änderung des Bewegungszustandes eines oder zweier Punkte oder einer Geraden dagegen tritt an Stelle des Carnotschen Satzes die allgemeine Beziehung (77).

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.